## با نام او

## حل آزمون کنترل خطی - زمستان ۹۳

پاسخ ۱-

روش اول: روث ـ هرویتز:

$1 + k\frac{N(s)}{D(s)} = 1 + k\frac{s^2+2s+2}{s^4}$

$\rightarrow s^4 + ks^2 + 2ks + 2k$ تشکیل درایه‌ها روث ـ هرویتز

| | | |
|---|---|---|
| $s^4$ | $1$ | $2k$ |
| $s^2$ | $k$ | $2k$ |
| $s^1$ | $2k-2$ | $0$ |
| $s^0$ | $2k$ | |

شرط پایداری در آزمون روث ـ هرویتز آن است که تمام درایه‌های ستون اول مثبت باشند. (هم علامت)

$k > 0$ و $2k-2 > 0 \rightarrow k > 1$

$2k > 0 \rightarrow k > 0$

$\xrightarrow{\cap} k > 1$

پس با استفاده از آزمون روث ـ هرویتز بدست آوردیم که به شرط $k > 1$ (بهره‌ی بزرگتر از یک) سامانه پایدار است.

$K = 1 \rightarrow \quad s^2 + 2 = 0 \rightarrow s = \pm\sqrt{2}\,j$

ردیف کامل صفر می‌شود

روش دوم: نمودار نایکوییست:

ابتدا ترتیب صفر و قطب را بدست می‌آوریم:

$s^4 = 0 \rightarrow p = 0 \rightarrow$ ۴ قطب صفر در مبدأ

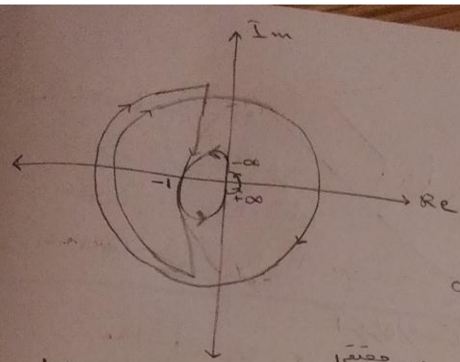
$s^2+2s+2=0 \rightarrow s=-1\pm j \rightarrow z=-1\pm j$ دو صفر مزدوج مختلط دارد

$G(s) = \frac{s^2+2s+2}{s^4} \rightarrow G(j\omega) = \frac{-\omega^2+2j\omega+2}{-j\omega^4}$

$|G(j\omega)| = \frac{\sqrt{(2-\omega^2)^2+4\omega^2}}{\omega^4} \qquad \angle G(j\omega) = tg^{-1}\left(\frac{2\omega}{2-\omega^2}\right) - (-90)$

for: $\omega = 0^+ \rightarrow |G(j\omega)| = \infty \qquad \angle G(j\omega) = -270^\circ$

for: $\omega = +\infty \rightarrow |G(j\omega)| = 0 \qquad \angle G(j\omega) = -90^\circ$




ادامه‌ی پاسخ سؤال اول: رسم نمودار نایکوئیست:

به تعداد قطب‌های موجود، نیم دایره به شعاع بی‌نهایت در جهت ساعتگرد حول صفر دارد:

به تعدادی که قطب‌ها بیشتر از صفرها باشند نیم دایره به شعاع ε حول مبدأ در جهت پادساعتگرد دارد.

برای رسم به ازای فرکانس‌های منفی ابتدا نمودار را به ازای فرکانس‌ها مثبت رسم نموده و سپس قرینه‌ی آن را نسبت به محور حقیقی رسم می‌کنیم. جهت اطلاع از ثبات پایداری به طور دقیق لازم است محل برخورد نمودار با محور اعداد حقیقی را بدست آوریم:

$$G(j\omega) = \frac{(2-\omega^2)+2j\omega}{-j\omega^3}$$

$$Im\{G(j\omega)\} = \frac{2-\omega^2}{\omega^3} = 0 \longrightarrow \omega = \pm\sqrt{2} = \pm 1,4 \ \frac{rad}{s}$$

$$Re\{G(j\omega)\} = \frac{2\cancel{j}\omega}{-j\omega^3} = \frac{-2}{\omega^2} \longrightarrow Re\{G(j\omega)\}\Big|_{\omega^2=2} = \frac{-2}{2} = -1$$

بدین ترتیب محل برخورد نمودار نایکوئیست با محور حقیقی ۱- است.

$Z = N + \cancel{P}^{0}$ ; تعداد دورهای ساعتگرد حول $\frac{-1}{k}$ = N و تعداد قطب‌های ناپایدار حلقه باز = P و

تعداد قطب‌های ناپایدار حلقه بسته = Z و

$Z = N \longrightarrow$ پس کافی است فقط تعداد دورهای ساعتگرد حول $\frac{-1}{k}$ را بشماریم

if: $\frac{-1}{k} > 0 \longrightarrow k<0 \longrightarrow Z=N=1 \longrightarrow$ سامانه یک قطب سمت راستی دارد و ناپایدار است.

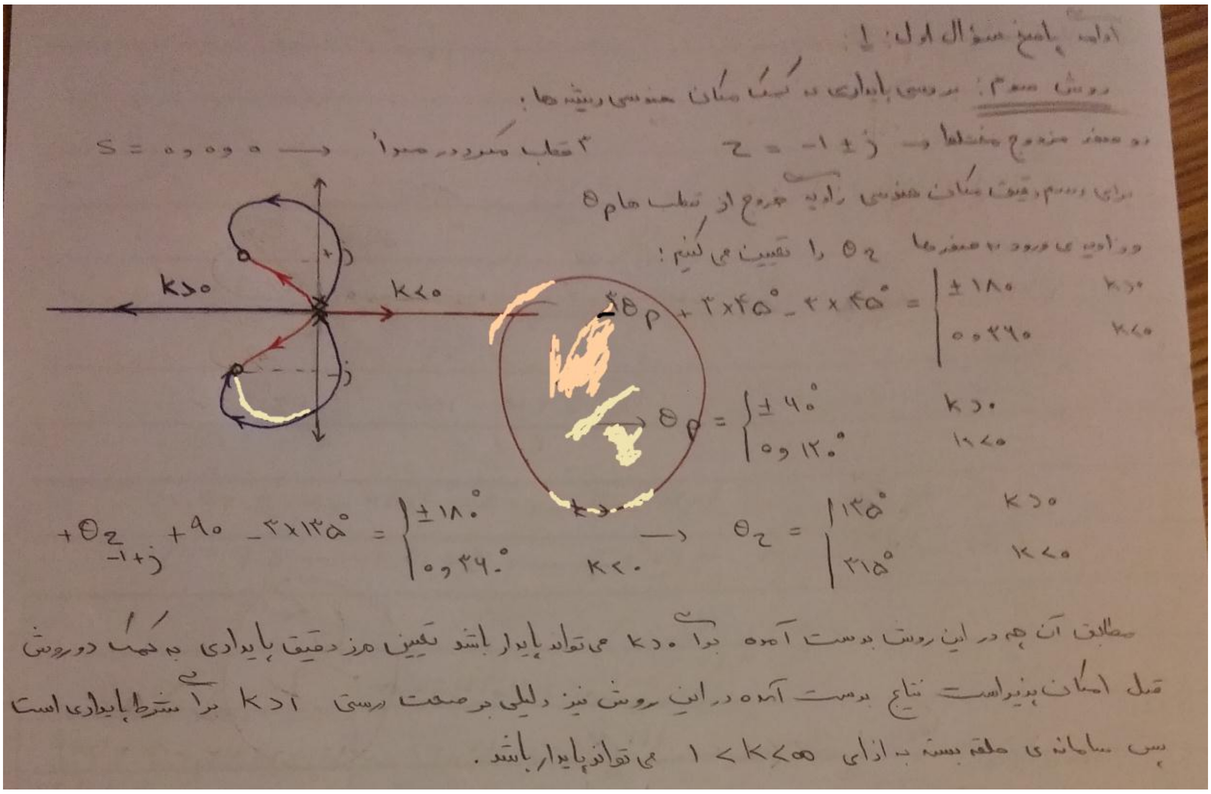
if: $-1<\frac{-1}{k}<0 \longrightarrow 1<k<\infty \longrightarrow Z=N=1-1=0 \longrightarrow$ سامانه دارای قطب سمت راستی نیست و پایدار است.

۱ دور ساعتگرد

۱ دور پادساعتگرد

if: $-\infty<\frac{-1}{k}<-1 \longrightarrow 0<k<1 \longrightarrow Z=N=2 \longrightarrow$ سامانه دارای دو قطب سمت راست است و ناپایدار می‌باشد.

لذا به کمک آزمون نمودار نایکوئیست نیز بدست آوردیم که به ازای $K>1$ سامانه حلقه بسته پایدار است و به ازای این محدوده قطب ناپایدار (سمت راستی) ندارد.



ادامه پاسخ سؤال اول: ۱

روش سوم: بررسی پایداری به کمک مکان هندسی ریشه‌ها:

دو صفر مزدوج مختلط ← $z = -1 \pm j$ ۳ قطب مکرر در صفر ← $s = 0, 0, 0$

برای رسم دقیق مکان هندسی زاویه خروج از قطب‌ها $\theta_p$ و زاویه ی ورود به صفرها $\theta_z$ را تعیین می‌کنیم:

$$-3\theta_p + 2\times 45^\circ - 2\times 45^\circ = \begin{cases} \pm 180 & k>0 \\ 0, 360 & k<0 \end{cases}$$

$$\theta_p = \begin{cases} \pm 60^\circ & k>0 \\ 0, 120^\circ & k<0 \end{cases}$$

$$+\theta_{z_{-1+j}} + 90 - 3\times 135^\circ = \begin{cases} \pm 180^\circ & k>0 \\ 0, 360^\circ & k<0 \end{cases} \longrightarrow \theta_z = \begin{cases} 135^\circ & k>0 \\ 315^\circ & k<0 \end{cases}$$

مطابق آنچه در این روش به دست آمده برای $k>0$ می‌تواند پایدار باشد تعیین مرز دقیق پایداری به کمک دو روش قبل امکان‌پذیر است نتایج به دست آمده در این روش نیز دلیلی بر صحت درستی $k>1$ برای شرط پایداری است پس سامانه ی حلقه بسته به ازای $\infty > k > 1$ می‌تواند پایدار باشد.

پاسخ‌های ۲ و ۳ را از پاسخ‌های دیگرِ مشابه می‌توانید بیابید!

و سپاس ویژهٔ اوست!